

Entre la nature et l'analyse : essai sur l'histoire de la loi de continuité au XVIII^e siècle

Jan Makovský —

Institut de philosophie, Académie Tchèque des Sciences

Résumé :

On appelle le XVIII^e siècle « l'âge de continuité », car la loi de continuité en est un des fils conducteurs. La poursuite du concept même de continuité marquait déjà le destin du siècle précédent, notamment dans la création de la « nouvelle science », dans la géométrisation galiléenne du mouvement d'un côté et dans l'établissement des lois du mouvement et du choc des corps de Descartes de l'autre. Pour aboutir, il fallait déceler un principe plus profond capable d'englober les deux derniers développements et de rendre compte de la notion de force : ce sera la loi de continuité. Quoiqu'elle soit originaire de la conquête du continu, la pensée physique du XVIII^e siècle se développe surtout autour du désaccord de fond entre la métaphysique monadique et la mécanique newtonienne. Cet article a pour objectif de suivre le destin de la loi de continuité leibnizienne dans les considérations mathématiques, physiques et métaphysiques du XVIII^e siècle, notamment dans la querelle des forces vives et dans celle des cordes vibrantes. D'où l'on pourra identifier les trois phases de son histoire : la loi de continuité en tant que loi universelle de la géométrie et de la nature ; le clivage de la loi en branches mathématique et physique ; et, finalement, la loi en tant que condition a priori de la science géométrique de la nature d'une part et loi théorique d'une nature inaccessible de l'autre.

Natura non facit saltus

Un passage de Jean Le Rond d'Alembert témoigne pour quelle raison on a l'habitude d'appeler le XVIII^e siècle « l'âge de continuité » :

Tous les êtres, et par conséquent tous les objets de nos connaissances, ont entre eux une liaison qui nous échappe ; nous ne devinons dans la grande énigme du monde que quelques syllabes dont nous ne pouvons former un sens. Si les vérités présentaient à notre esprit une suite non interrompue, il n'y aurait point d'éléments à faire, tout se réduirait à une vérité unique dont les autres vérités ne seraient que des traductions différentes. Les sciences seraient alors un labyrinthe immense,

mais sans mystère, dont l'intelligence suprême embrasserait les détours d'un coup d'œil, et dont nous tiendrions le fil. Mais ce guide si nécessaire nous manque [...].¹

Révélaient la condition humaine « labyrinthique » ainsi que les paradoxes propres au domaine du continu, il nous fait aussi bien entrevoir le *filum Ariadnes* que toucher l'un des « fils conducteurs² » de cette époque : la loi de continuité.

En effet, la poursuite de ce fil d'Ariane dans le labyrinthe du continu marquait le destin intellectuel du siècle précédent. Aussi n'est-il pas étonnant qu'elle coïncide avec la création de la « nouvelle science » elle-même. Car l'entreprise de la géométrisation du mouvement local, ainsi que celle de l'établissement des règles du choc des corps impliquent, au plus profond, le problème de la relation entre le continu et le discret, c'est-à-dire le problème de la composition du continu. Rien de moins n'est en jeu que les questions de la nature du mouvement, de la composition de la matière, de la force « interne et externe » – bref, de la nature comprise universellement et *more geometrico*. Quel est le rapport entre le mouvement et le repos, le divisible et l'indivisible, la quantité et la limite, le fini et l'infini ? Où placer la « transition entre la géométrie et la physique »³, ce graal ultime de la physique géométrique et de la géométrie physique ? Comment les *mathematicæ mixtæ* sont-elles possibles ? Et quel rôle faut-il attribuer à l'imaginaire dans les démarches de la science physique ? C'est la loi de continuité ou la « *lex continuitatis Leibniziana*⁴ » qui

1 Jean le Rond d'Alembert, *Essai sur les éléments de la philosophie*, dans *Œuvres complètes de d'Alembert*, Paris, A. Belin/Bossange, t. I, 1821, p. 130. Article publié avec le soutien de la Fondation pour la Science de la République tchèque (Czech Science Foundation), projet GJ19-03125Y « Matematika v Českých zemích ».

2 Voir Lucien Vinciguerra, *Langage. Visibilité. Différence*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1999, p. 154.

3 Pacidius Philalethi, 1676, A VI, 3, 532.

4 Voir Gottfried Ploucquet, *Dissertatio historico-cosmologica de Lege continuitatis sive gradationis Leibniziana*, Tubingæ, Typis Schrammianis, 1761, p. 21. Cf. aussi « *lex continui* » dans Abraham Gotthelf Kästner, *De lege Continui in Natura Dissertatio*, Leipzig/Langenheim, 1750 ; repris et augmenté dans *id.*, *Anfangsgründe der höhern Mechanik*, Göttingen, Wwe. Vandenhoeck, t. IV, 1766, p. 350-368. Pour la tournure « une loi de continuité » voir ci-dessous. Les deux ouvrages mentionnés constituent de rares exemples des sources « secondaires » synthétiques centrées sur la loi de continuité au XVIII^e siècle. Vu la portée philosophique et l'influence historique du concept dans la mécanique rationnelle et l'analyse mathématique (entre autres), il est d'autant plus surprenant que le nombre de références érudites d'aujourd'hui soit relativement mince. Pour la loi de continuité chez Leibniz, il faut citer (toujours) notamment Herbert Bregger, « Das Kontinuum bei Leibniz », dans Antonio Lamarra (dir.), *L'infinito in Leibniz. Problemi e terminologia*, Roma, Edizioni del Ateneo, 1990, p. 53-67 ; François Duchesneau, *Leibniz et la méthode de la science*, Paris, PUF, 1993, p. 311-374 ; Manuel Luna Alcoba, *La ley de continuidad en G. W. Leibniz*, thèse sous la dir. de Juan Arana Cañedo-Argüelles, Université de Sevilla, 1994 ; et Jean-Pascal Alcantara, *Sur le second labyrinthe de Leibniz. Mécanisme et continuité au XVII^e siècle*, Paris, Harmattan, 2003, p. 171-203 ; tout récemment Richard Arthur, *Monads*,

constitue peut-être la seule réponse jamais offerte à toutes ces questions, ou plutôt la seule ayant l'ambition de leur répondre à toutes à la fois.

Pourtant, l'idée de la loi de continuité *avant la lettre* fut présente, d'une manière intuitive, sous-jacente et, pour ainsi dire, véritablement continue, dans la philosophie naturelle depuis des temps anciens : *natura non facit saltus*. Elle justifiait, sous la forme de la fameuse « chaîne des êtres naturels »⁵, des considérations divinatoires, magiques, alchimiques et même médicales, réconciliant et radicalisant, au niveau symbolique et combinatoire, des réalités apparemment éloignées, voire contradictoires ou incommensurables. En effet, c'est cette idée qui, par cela même, régissait des procédés fondamentaux de la science classique : analogie, expérience de pensée, induction, interpolation, etc⁶. Car c'est en vertu de ce principe que les choses peuvent, à partir de leurs différences, se classer en séries ordonnées, se contenir et, par conséquent, se transformer les unes dans les autres. Grâce au passage ininterrompu à l'horizon infini où toutes les différences se résorbent en une unité, les choses symbolisent et communiquent « pour que l'univers soit un continu parfait »⁷.

En fin de comptes, l'adage *natura non facit saltus* n'exprime, d'une manière laconique, que cette intuition profonde et millénaire d'une nature une,

Composition, and Force: Ariadnean Threads through Leibniz's Labyrinth, Oxford, Oxford University Press, 2018. Le manque d'ouvrages spécialisés sur l'histoire de la loi de continuité au XVIII^e siècle est encore plus considérable. Elle est sommairement tracée dans Gert Schubring, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*, New York, Springer, 2006, p. 174-186 ; Giorgio Tonelli, « The Law of Continuity in the Eighteenth Century », *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, n° 27, 1963, p. 1619-1638 ; et Marij van Strien, « Continuity in Nature and in Mathematics: Du Châtelet and Boscovich », dans Michela Massimi, Jan-Willem Romeijn et Gerhard Schurz (dir.), *EPSA15 Selected Papers : European Studies in Philosophy of Science*, t. V, Cham, Springer, 2018, p. 71-81. Divers aspects de la matière sont repérables dans des histoires de la mécanique rationnelle comme celle de Clifford Truesdell, *An Idiot's Fugitive Essays on Science. Methods, Criticism, Training, Circumstances*, New York, Springer, 1984, p. 81-183 ; ainsi que dans des notes et introductions des éditions de Euler, de d'Alembert, de Boscovich et d'autres figures principales, dont l'une des plus utiles nous paraît être celle d'Andreas Speiser, « Vorwort », dans Leonhard Euler, *Opera omnia*, éd. Constantin Carathéodory, Bern, Orell Füssli, t. I.25, 1952, p. XXII-XXVI. L'objectif du présent essai est ainsi en même temps plus modeste et plus ambitieux, car plus général : il s'agit de proposer, à partir des moments critiques dans l'interaction entre l'analyse et la mécanique au cours du XVIII^e, une brève histoire de la loi de continuité en tant que dogme de la philosophie naturelle, ainsi que de son déclin final.

- 5 Arthur Lovejoy, *The Great Chain of Being. A Study of the History of an Idea*, Cambridge, Harvard University Press, 1936. Cette même idée au fond de la nature ne deviendra, suite aux événements traités ci-dessous, qu'un « *old prejudice* », pour reprendre le mot de Clifford Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, New York, Springer, 1968, p. 120.
- 6 Voir la « solution physique » du problème de la courbe brachistochrone par Johann Bernoulli, *Inventio curvae brachystochronae*, dans *Opera omnia*, Lausanæ/Geneviæ, Sumptibus Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum, 1742, t. I, p. 190. Voir *id.*, *Discours sur les lois sur la communication du mouvement*, dans *Opera omnia*, éd. cit., t. III, p. 58.
- 7 Nicolas de Cues, *De la docte ignorance*, trad. Louis Moulinier, Paris, Guy Trédaniel, 1979, p.171.

continue, pleine, harmonique et parfaite unité dans la diversité⁸. Elle est l'expression de la nature ainsi que la nature de l'expression ; et c'est la nature elle-même, en tant qu'expression rationnelle et énigmatique⁹ d'un principe infini, qui est en jeu. Le continu – le continu d'une quantité géométrique en particulier, puisqu'elle en représente l'expression la plus pure – en constitue la matière de fond : en entrant dans le labyrinthe, on aborde la question limite de la « science énigmatique ». Or, la loi de continuité de Leibniz, notamment en tant que principe régulateur de l'usage du calcul de l'infini en physique donne une réponse à cette question limite en saisissant la nature de l'horizon et de la limite. Par conséquent, c'est la nature géométrique et géométrisée qui est en jeu avec la loi de continuité, désormais comprise comme une *hypothèse* ou un *dogme*.

Les limites de l'analyse, les limites de la mécanique

Sable et brouillard : les fondements labyrinthiques

Il s'avéra sans trop d'étonnement que l'issue du labyrinthe du Grand Siècle cachait un autre labyrinthe, voire plusieurs labyrinthes du continu. D'abord la philosophie naturelle du XVIII^e siècle sera agitée par une opposition de base entre la mécanique newtonienne des corps durs et la (méta)physique continuiste de Leibniz. De plus, une pareille antinomie fondamentale de « sable et brouillard¹⁰ » se répliquera au sein même du newtonianisme et affectera l'architecture et la législation des *Philosophiae naturalis principia mathematica*¹¹. Obligée au « passage du discontinu au continu¹² » sous la forme d'une réconciliation à l'infini de l'action continue de la force (de gravitation) et de

8 La notion de *horror vacui* n'est ainsi qu'une conséquence de cette idée ; pour un exemple, voir la polémique entre Noël et Pascal dans Blaise Pascal, *Œuvres complètes*, éd. Michel le Guern, coll. « Bibliothèque de la Pléiade », t. I, 1990, p. 373-374.

9 En tant que « *imago-similitudo* » ; pour plus de détails, voir Jean Seidengart, *Dieu, l'univers et la sphère infinie. Penser l'infinité cosmique à l'aube de la science classique*, Paris, Albin-Michel, 2004, p. 53-61. C'est au niveau de la réalité symbolique (un symbole, à l'instar du continu, consiste en une réalité dynamique ; en quelque sens, il est et, en même temps, il n'est pas ce qu'il est) qu'a lieu la « science énigmatique » dont la continuité constitue la matière de fond. Voir Jan Makovský, « Cusanus and Leibniz: Symbolic Explorations of Infinity as a Ladder to God », dans Simon Burton, Joshua Hollmann et Eric Parker (dir.), *Nicholas of Cusa and Making of the Early Modern World*, Leiden/Boston, Brill, 2019, p. 452-456.

10 Voir Bruce Pourciau, « Instantaneous impulse and continuous force: The Foundations of Newton's Principia », dans Rob Illife et George Smith (dir.), *The Cambridge Companion to Newton*, Cambridge, Cambridge University Press, 2016, p. 93 sq.

11 Voir Mariano Giaquinta, *La forma delle cose. Idee e metodi in matematica tra storia e filosofia*, Roma, Edizioni di storia e letteratura, t. II, 2014, p. 286-287.

12 Voir Michel Blay, *Penser avec l'infini. La fécondité d'une notion mathématique et philosophique, de Giordano Bruno aux Lumières*, Paris, Vuibert, 2010, p. 72.

la succession discrète d'impulsions, la solution newtonienne ne manifeste pas de divergences de principe par rapport à la loi de continuité de Leibniz.

Prenons l'énonciation de la *Deuxième loi du mouvement* qui établit la mesure du « changement du mouvement », ou plutôt de la quantité du mouvement, sous forme analogique de lignes et d'aires géométriques proportionnées, dont les valeurs, par l'axiome d'Archimède, sont nécessairement *finies* : « Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée »¹³.

La deuxième loi s'applique donc, par sa seule forme géométrique, à une force agissant d'une façon *discontinue* : précisément à cause de la mesure de segments rectilignes découpés par les impulsions successives définissant la trajectoire du mouvement. Or, l'objectif de Newton consiste principalement à donner une description du mouvement des corps soumis à l'action d'une force centripète, supposée continue. Newton prend l'exemple de la loi de Galilée : si la chute libre des corps, en vérité l'un des effets d'une telle force centripète, est une action continue conceptualisée à partir des *momenti* instantanés¹⁴, il faut donc que la loi de Galilée représente un cas spécial de la loi d'attraction, à savoir celui où l'action est prise non seulement comme continue, mais aussi comme constante ou uniforme. Or, en tant que générale, l'action de la force d'attraction, elle, devient nécessairement *variable* ; et, par conséquent, il faut que la description recherchée devienne, elle aussi, « variable » ; ou, plus précisément, que la loi de Galilée soit transformable et qu'elle y intervienne en tant que valeur singulière, infinitésimale ou instantanée¹⁵. Ainsi la relation est préservée et Newton reste en mesure de traiter implicitement la vitesse acquise dans chaque instant comme une « fonction » uniforme ou linéaire du temps, ainsi que la « distance » parcourue proportionnée au carré du temps¹⁶. C'est ainsi qu'au début (ou à la fin) du mouvement, la courbe et la tangente peuvent coïncider¹⁷.

13 Isaac Newton, *Les principes mathématiques de la philosophie naturelle*, trad. Émilie du Châtelet, Paris, Desaint et Saillant, t. I, 1759, p. 17. Et Newton d'ajouter : « soit qu'elle ait été imprimée en un seul coup, soit qu'elle l'ait été peu à peu et successivement » (*ibid.*).

14 Non seulement par Galilée, la troisième journée des *Discorsi*, mais principalement par Huygens.

15 Suivant le principe exprimé dans le Lemme 10 du § 1 du I. Livre : « Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps » (*ibid.*, p. 42).

16 À la différence de la définition VIII où « La quantité motrice de la force centripète est proportionnelle au mouvement qu'elle produit dans un temps donné » (*ibid.*, p. 6).

17 Voir la méthode des premières et dernières raisons employée dans le fameux problème de l'angle de contingence, Lemme VI (*ibid.*, p. 40), d'où le résultat analogique dans le cas d'aires, Lemme IX (*ibid.*, p. 42).

Et pourtant, il n'y a aucune mention du temps dans la formulation de la deuxième loi du mouvement, ce qui est d'autant plus déconcertant que Newton s'en sert pour la démonstration de la loi de Galilée elle-même. Car, en fin de compte, c'est le flux ininterrompu du temps qui, par l'intermédiaire du mouvement, définit l'idée même de la continuité – qu'elle soit métaphysique, celle de l'action de la force, ou géométrique, celle de la trajectoire orbitale. Nous voici devant la porte du labyrinthe. Quelle est la démarche de Newton ?

Considérons l'exemple primordial de la « *recherche de forces centripètes* », loi des aires : « Dans les mouvements curvilignes des corps, les aires décrites autour d'un centre immobile sont dans un même plan immobile, et sont proportionnelles au temps »¹⁸. Nous voyons que la mesure géométrique du mouvement impose la conceptualisation discontinue du temps. Car c'est grâce aux intervalles uniformes du temps qu'il est possible, à travers des segments rectilignes¹⁹ « composant » la trajectoire, de comparer les vitesses acquises. Par conséquent, nous pouvons mesurer les forces imprimées « par un seul coup » au bout de chacun des intervalles. Et pourtant, les mouvements étant supposés curvilignes et la courbe décrite, tout à fait générale, il faut que la force agisse sans interruption. Comment franchir le pas de la géométrie du mouvement à la géométrie des forces ? Le temps étant divisé dans ces intervalles égaux

Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles [...] ²⁰ augmente et que leur largeur diminue à l'infini ; il est clair [...] que leur périmètre sera une ligne courbe. Donc la force centripète, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit sans interruption, et les aires quelconques [...] qui étaient proportionnelles aux temps employés à les décrire leur seront encore proportionnelles dans ce cas²¹.

Afin que le périmètre soit la ligne courbe, il faut donc que le début et la fin de chaque intervalle coïncident ou deviennent un, de même que les impulsions successives résultant dans l'action *continue*, tout en préservant la proportionnalité. La loi de Galilée et la loi des aires de Kepler se trouvent réunies

18 La Proposition I, Théorème I du Livre I (*ibid.*, p. 49).

19 Par la *Première loi du mouvement*. Voir Isaac Newton, *Les principes mathématiques de la philosophie naturelle*, op. cit., p. 49-50. Voir Michael Mahoney, « The mathematical realm of nature », dans Daniel Garber et Michael Ayers (dir.), *The Cambridge History of Seventeenth-Century Philosophy*, Cambridge, Cambridge University Press, t. 1, 2008, p. 746.

20 Triangles coplanaires dont les sommets sont le centre d'attraction et les extrémités, des segments rectilignes de la trajectoire.

21 Isaac Newton, *Les principes mathématiques*, op. cit., p. 50.

sur la base théorique commune qui, malgré tout, se situe au fond d'une abîme sans fond. La transition entre la géométrie et la physique est inaccessible. Les frontières de l'analyse approchent celles de la mécanique, à l'instar de l'horizon. Elles ne peuvent coïncider que grâce à un principe de continuité fondée, à son tour, en *continuité* du mouvement et du temps. C'est cette continuité cinématique, « intuitive » et sans fondement²², qui rend intelligible la force (métaphysiquement) continue et qui permet sa mesure.

Vitesse instantanée

Il est désormais établi que ce fut Pierre Varignon qui franchit le pas décisif²³ permettant au calcul mécanique d'entrer dans la nature du mouvement. C'est à lui que nous devons la conceptualisation différentielle de la « vitesse dans chaque instant » au travers de laquelle « les limites de la mécanique deviendront celles du calcul »²⁴. À la différence du continu leibnizien fondé dans l'abstraction métaphysique des conditions de l'unité naturelle²⁵, Varignon partit de l'image du continu newtonien, bien plus immédiat et manifeste – celui du mouvement physique ou de l'*influxus continuus*²⁶. Mais, à la différence de Newton, il l'abordera avec toute la puissance symbolique de la « nouvelle méthode » de Leibniz, lui permettant ainsi de « traiter les mouvements variés comme les uniformes, et de tirer des uns les mêmes conséquences que des autres »²⁷.

Comment est-ce devenu possible ? Nous avons vu que c'était la *représentation géométrique* d'impulsions sous la forme de segments finis, qui empêchait Newton d'élever la mesure mathématique aux limites de la mécanique, ou de fournir « une règle générale des vitesses variées ». Afin de donner une telle règle, il est nécessaire de déployer l'imagination continuïste – elle-

22 Newton la décrit d'une façon géométrique dans les lemmes VI-XI du livre I des *Principes*. Il n'aborde pas la question de la *composition* du continu pour des raisons évidentes de *réalité* de l'espace posé comme absolu et du fameux labyrinthe qui s'ensuit directement.

23 Dans deux mémoires donnés aux séances de l'Académie royale des sciences en 1698. Voir notamment Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1992, p. 113-222.

24 Michael Mahoney, « The mathematical realm of nature », art. cit., p. 749.

25 Voir surtout *Numeri infiniti*, avril 1676, A VI, 3, 502-503 ; et *Pacidius Philalethi*, *ibid.*, 546-556.

26 En effet, il s'agit bien du point de départ newtonien que Varignon adopte pour établir le fondement du calcul infinitésimal lors de la fameuse controverse avec Michel Rolle ; et, fort ironiquement, ce sont les concepts théoriques de Newton, y compris la méthode « des premières et dernières raisons », dont se réclame – d'une manière explicite – Varignon afin de défendre le calcul de Leibniz. Voir Pierre Varignon, « Controverse Varignon – Rolle (1700-1701) », dans *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, éd. David Speiser, Basel, Springer, t. II, 1988, p. 353-356.

27 Suivant l'expression de Fontenelle dans l'*Histoire de l'Académie Royale des sciences*, 1700 ; citée par Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique*, op. cit., p. 154.

même régie par la loi de continuité – sur bien plus de niveaux symboliques que celui des segments et des aires. Au lieu de la proportion géométrique, il faudra établir une dépendance « fonctionnelle²⁸ » ou d'expression réglée entre les variables du mouvement *homogénéisées* par la loi de continuité²⁹ sous forme de lignes courbes, car, dira Varignon plus tard

[...] l'espace et le temps etant des grandeurs heterogenes, ce n'est point proprement elles qu'on compare ensemble dans le rapport qu'on appelle vitesse, mais seulement les grandeurs homogenes qui les expriment, lesquelles sont ici, et seront toujours dans la suite ou deux lignes, ou deux nombres, ou deux telles autres grandeurs homogenes qu'on voudra³⁰.

Une fois le symbolisme différentiel appliqué, c'est le calcul lui-même qui est en mesure d'englober toutes les relations concernées, d'en garantir l'*harmonie*, pour reprendre l'expression de Leibniz, et d'en soutenir les *transformations* mutuelles par des manipulations algébriques. Ainsi, la propriété fondamentale pour l'unité théorique de la mécanique, l'uniformité (« variation infiniment petite ») de la vitesse instantanée, ne devient qu'une conséquence formelle du calcul général, et les variations de quantités physiques (exprimées en courbes) telles perspectives d'une seule

| Des vitesses | Regle generale Des temps | Des espaces |
|---------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $y = \frac{dx}{dz}$ | ou $dz = \frac{dx}{y}$ | ou $dx = ydz$ ³¹ |

La perspective acquise par l'application de la loi de continuité sur les grandeurs hétérogènes sera abondamment et ingénieusement exploitée par Varignon. Nous n'allons pas suivre ses avancements ultérieurs³², car c'est cette

28 L'inspiration leibnizienne, conceptuelle aussi bien que méthodique, est évidente. Pour le concept de *fonction*, abstraite et libérée de quelque « nature » de courbes que ce soit, voir *Nova calculi differentialis applicatio*, 1694, GM V, 306 ; voir *Additio ad hoc schediasma*, 1695, GM V, 327-328.

29 Rappelons qu'une pareille « homogénéisation à la limite » des réalités disparates, voire contradictoires, en apparence sous une même expression dynamique et relationnelle est l'une des manifestations majeures de l'idée de la nature une, continue, analogique et harmonique. Pour une exposition classique voir la fameuse *Lettre à la reine Sophie-Charlotte*, 8 mai 1704, GP III, 336-375.

30 « Des mouvemens variés de volonté, comparés entr'eux et avec les uniformes », dans *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1708, p. 223, cité dans Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique*, op. cit., p. 157.

31 « Regle generale pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques variées a discrétion », 1698, cité dans *La naissance de la mécanique analytique*, op. cit., p. 158.

32 Ils aboutissent, entre autres, à une théorie générale du mouvement déterminé par l'action de la force centrale du début des *Principia*. Pour plus de détail, voir la référence dans la n. 22.

seule perspective, abstraite et symbolique, qu'il nous importe de développer ici. Non seulement elle ouvre la science du mouvement à la liberté algorithmique sans bornes des mathématiques transcendantes, mais encore libère le calcul de l'infini des contraintes d'origine physique aussi bien que géométrique³³. Nous voici donc devant le terrain symbolique entièrement gouverné par la loi de continuité par l'intermédiaire de son instrument suprême, le calcul infinitésimal. Lorsque la continuité définit le champ même de la mécanique, la loi de continuité, sous-jacente jusqu'à présent, apparaîtra au grand jour et sera mise en cause chaque fois qu'une conception théorique (ou l'une de ses conséquences) lui répugne³⁴. La question la plus brûlante de la mécanique devient alors celle de la relation entre les expressions symboliques du modèle mathématique et le système physique³⁵. Désormais, dans le langage des formules analytiques et des équations différentielles, que signifie le fait que « la nature ne fait point de sauts » ?

Les analystes et les (méta)physiciens

La réponse de Leibniz, nous la savons³⁶, au problème de la « transition entre la géométrie et la physique », consistait précisément en la loi de continuité permettant la mathématisation de la continuité physique. Manifestation du principe de raison au sein de la nature phénoménale³⁷, c'était la loi de continuité

- 33 Le fondement de continuité chez Newton, *l'influxus continuus*, fait déterminer, d'une façon implicite et naturelle, le choix du temps pour la variable indépendante dans le calcul des fluxions. Le symbolisme de Leibniz le reflète explicitement : la progression des variables avec dt est prise pour constante. Pour cette raison également, le calcul leibnizien permet bien plus de souplesse en autorisant un choix de la variable indépendante dictée par les besoins du calcul ; voir Henk J. M. Bos, « Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus », *Archive for History of Exact Sciences*, t. XIV, n° 1, 1974, p. 42-44. Or, le fruit des analyses de Varignon est précisément d'induire cette généralité symbolique dans l'étude de la mécanique.
- 34 Rappelons que, dans « l'emboîtement des rôles » pour la loi de continuité chez Leibniz, l'un des premiers était celui de principe régulateur métathéorique – de « servir de pierre de touche des dogmes » (*Tentamen Anagogicum*, 1696, GP VII, 279 ; voir *Animadversiones in partem generalem Principiorum Cartesianorum*, 1692, GP IV, 375). Il est invoqué par Leibniz contre les règles cartésiennes du choc (GP III, 51-55). Voir François Duchesneau, *Leibniz et la méthode de la science*, op. cit., p. 336-374.
- 35 Michael Mahoney, « The mathematical realm of nature », art. cit., p. 749-750.
- 36 Voir la lettre à Varignon du 2 février 1702, GM IV, 92-93. Cf. aussi GP IV, 568-569.
- 37 La continuité fondamentale entre les deux principes se révèle depuis la *Theoria motus abstracti*, 1672, A VI, 2, 265 ; et s'établit, dans le contexte de l'analyse du choc direct, dans le *De corporum concursu (Réforme de la dynamique)*, éd. Michel Fichant, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1994, p. 213-229). Enfin, elle est posée comme tout à fait explicite, dans les *Principia logico-metaphysica*, 1689 (?), A VI, 4-B, 1645 : « *Sequitur etiam hinc [nihil sine ratione] cum omnia ab una parte se habent ut ab alia parte in datis, tunc etiam in quaesitis seu consequentibus omnia se eodem modo habitura esse utrinque. Quia nulla potest reddi ratio diversitatis, quae utique ex datis petenda est* ».

qui, en tant que principe architectonique des existences ou loi des lois de la nature, harmonisait les ordres du continu et du discret tout en sauvant l'individualité infinie des phénomènes aussi bien que la possibilité de la physique. Et, pour cette raison même, elle autorisait l'usage du calcul infinitésimal au sein de cette dernière (ou bien l'application des lois de la physique aux éléments infinitésimaux)³⁸.

Déployant la « souveraine sagesse » qui fait tout en parfait géomètre, la loi de continuité fut pensée essentiellement comme *universelle* : géométrique *et* physique. La déclaration de l'un des plus fermes partisans de la loi de continuité, Jean Bernoulli, illustre parfaitement la structure logique du « dogme » :

[...] je parle de cet ordre immuable et perpetuel, établi depuis la création de l'Univers, qu'on peut appeler la LOY DE CONTINUITÉ, en vertu de laquelle tout ce qui s'exécute, s'exécute par des degrez infiniment petits. Il semble que le bon sens dicte, qu'aucun changement ne peut se faire par sault ; *Natura non operatur per saltum* [...] Si la nature pouvait passer d'un extrême à l'autre, par exemple du repos au mouvement, du mouvement au repos, ou d'un mouvement en un sens à un mouvement en sens contraire, sans passer par tous les mouvements insensibles qui conduisent de l'un à l'autre ; il faudroit que le premier état fût détruit, sans que la nature sçût à quel nouvel état elle doit se déterminer ; car enfin par quelle raison en choisirait-elle un par préférence, et dont on ne pût demander pourquoi celui-ci plutôt que celui-là³⁹ ?

Or le niveau de généralité acquis à travers de l'appareil formel basé sur le concept de fonction permet, désormais, non seulement d'analyser plus profondément la continuité en tant que principe métaphysique de la mécanique, c'est-à-dire les liens entre les « lois de continuité » mathématique et physique, mais aussi – et pour la même raison – la notion de continuité par rapport à son support intuitif géométrique : n'importe quelle courbe représente-t-elle une fonction ou plutôt n'importe quelle fonction représente-t-elle une courbe ? Et puis, est-ce que chaque fonction correspond à une expression analytique ; et cette dernière, suffit-elle à comprendre toute la nature d'une courbe continue ? Enfin, tous les effets et figures d'ordre physique suivent-

38 Voir Clifford Truesdell, « The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788 », dans Leonhard Euler, *Opera omnia*, éd. Andreas Speiser, Ernst Thorst et Charles Blanc, Zürich, Orell Füssli, t. II.10, 1960, p. 244.

39 *Discours sur les lois de la communication du mouvement* [1724], dans *Opera omnia*, éd. cit., t. III, p. 9. Voici la source des inventions les plus spectaculaires de Jean Bernoulli : « *Naturam, ceu immutabilium suarum legum memorem, sibi nunquam non constare* » (*De curva aequilibrationis* [1694], dans *Opera omnia*, éd. cit., t. I, p. 135).

ils une certaine équation symbolique ; et *vice versa*, est-ce que la nature elle-même est en mesure d'exécuter la solution de toute équation symbolique⁴⁰ ?

Le XVIII^e siècle a connu deux débats scientifiques majeurs susceptibles d'éclairer les questions qui viennent d'être évoquées. Ces dernières visent toutes à délimiter de nouveau l'analyse et la mécanique ; et toutes, ensemble, ébranlent la structure de la loi de continuité en mettant en cause sa portée universelle. Le premier susceptible d'éclairer, la querelle des cordes vibrantes, a fini par un clivage entre les branches géométrique et physique ; l'autre, la controverse des forces vives provenant de la même source que la loi de continuité elle-même⁴¹, aura pour conséquence une double transposition du domaine de la loi de continuité et le déclin final de celle-ci en tant que loi de la nature⁴².

Les cordes vibrantes

Les doutes sur l'universalité géométrique de la loi de continuité n'étaient rien de nouveau au tournant du Grand siècle, qu'il se soit agi de points de discontinuité ou de problèmes optiques⁴³. Les bouleversements plus profonds et plus radicaux de la perspective symbolique de la continuité se déclenchent en 1713 quand Taylor dérive les équations différentielles, démontrant les oscil-

-
- 40 « Et il n'y a par exemple point de visage dont le contour ne fasse partie d'une ligne Géométrique et ne puisse être tracé tout d'un trait par un certain mouvement réglé » (*Discours de métaphysique*, art. 6, A VI, 4-B, 1538). Le passage célèbre du *Discours* n'est qu'un résumé succinct de la loi de continuité prise dans son universalité. La profession la plus vive de la continuité universelle est, à notre connaissance, celle de « l'équation cosmique » comportant les classes des êtres « comme autant d'Ordonnées d'une même courbe dont l'union ne souffre point qu'on en place d'autre entre eux » (nous soulignons). Pourtant, il faut remarquer que la notoriété est largement due au rôle qu'elle avait joué lors de son apparition à la moitié du siècle et à son intervention dans la dispute sur le principe de la moindre action. Voir *Maupertuisana*, Hambourg, 1753, p. 163-172.
- 41 Il s'agit toujours de la recherche de l'invariant formel (métaphysique) de la physique, la loi « la plus universelle et la plus inviolable, savoir qu'il y a toujours une parfaite équation entre la cause pleine et l'effet entier » (Réponse à Catelan, 1687, GP III, 45-46). Voir aussi la lettre à Oldenburg du 28 août 1676, A III, 1, 586 ; et la n. 34.
- 42 L'enjeu, dans les deux cas, n'est rien moins que l'universalité. Il y a donc nécessairement un enchevêtrement presque inextricable des deux histoires – non seulement au niveau des idées mais aussi en ce qui concerne les acteurs, sommités scientifiques du temps. Il est hors de question de suivre toute l'histoire, d'ailleurs assez bien connue, qui, peut s'en faut, coïncide avec celle de la mécanique rationnelle du XVIII^e siècle. Aussi, nous allons laisser à côté l'aspect social, institutionnel et politique, pourtant décisif dans l'émergence des idées scientifiques.
- 43 Les points de rebroussement de différentes sortes, des « becs d'aigle », des caustiques etc., sont étudiés en détail dans *l'Analyse des infiniment petits* de 1696, et encore plus dans la correspondance entre Guillaume de l'Hospital et Jean Bernoulli (*Der Briefwechsel von Johann I. Bernoulli. Band 1: Der Briefwechsel mit Jacob Bernoulli, dem Marquis de l'Hôpital u.a.*, éd. Otto Spies, Basel, Birkhäuser, 1955, p. 214-223). On constate des tentatives plus ou moins curieuses chez la marquise de Châtelet ou chez Boscovich de « sauver » la continuité géométrique ; voir Marij van Strien, « Continuity in Nature and in Mathematics: Du Châtelet and Boscovich », art. cit.

lations harmoniques d'une corde en supposant que les petits « éléments » de la corde décrivent chacun un mouvement de pendule⁴⁴. Le problème sera repris par d'autres géomètres⁴⁵, dont notamment Jean Bernoulli en 1728⁴⁶, qui ajoute l'analyse d'un problème analogique discret intégrant enfin la *vis viva* d'un système fini de points matériels de la corde ; Daniel Bernoulli, et puis Euler en 1735, qui, à part une brève présentation historique de la théorie d'oscillation, donne une solution du problème en termes de statique⁴⁷. Une autre décennie passe, abondante en formules et analogies de chaînes, de barres, de pendules etc., et pourtant, l'idée cruciale, celle des équations aux dérivées partielles, qui provoquera la « querelle » au sens propre, apparaîtra en 1747 dans un contexte bien différent, celui de « l'inconstance du cours des vents »⁴⁸. L'auteur, Jean Le Rond d'Alembert, la développera ensuite dans deux mémoires consacrés au sujet même des cordes vibrantes, qui fournissent des solutions aux équations proposées par Taylor⁴⁹. En fin de compte, c'est précisément l'ouverture d'un tout nouveau domaine de l'analyse infinitésimale opérée par d'Alembert, domaine résidant désormais tout entier dans les équations différentielles, qui mettra en cause, avec la notion de fonction (analytique), la généralité de la loi de continuité.

Pour Euler et d'autres après lui, « une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes »⁵⁰. Une expression analytique comprend des opérations de nature algébrique, transcendante et différentielle, qui sont, en effet, en nombre infini ; c'est pourquoi Euler vise à les réduire toutes sous la forme de développement en séries infi-

44 « De motu nervi tensi », *Philosophical Transactions*, n° 28, 1713, p. 26-32. Repris et remanié dans *Methodus incrementorum directa et inversa*, London, 1715. L'idée directrice de la solution, « *vis acceleratrix cujusvis puncti est ut flexura in isto puncto* » (*ibid.*, p. 88), et l'analogie avec le pendule nous font déjà entrevoir la relation profonde entre la recherche des oscillations et la dynamique de la « force vive » (*cf.* la n. 43).

45 Voir John T. Cannon et Sigalia Dostrovsky, *The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742*, New York/Heidelberg/Berlin, Springer, 1981.

46 *Excerpta ex Epistolis datis ad filium Danielem* [1729], dans *Opera omnia*, éd. cit., t. III, 124-130. *Cf. Meditationes de chordis vibrantibus*, 1728, *ibid.*, p. 198-210.

47 « De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium methodus nova et facilis [1734-5] », *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, n° 7, 1740, p. 99-122, 1740. Voir John T. Cannon et Sigalia Dostrovsky, *The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742*, *op. cit.*, p. 53-76.

48 Jean Le Rond d'Alembert, *Réflexions sur la cause générale des vents*, Paris, Chez David, 1747.

49 « [...] il y a une infinité d'autres courbes que la Compagne de la cycloïde allongée, qui satisfont au problème dont il s'agit » (« Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, n° 3, 1747, p. 214-219). Il est à noter que ce sont les développements de Taylor que d'Alembert suit même dans l'*Encyclopédie*, s. v. « Cordes (Vibrations des) ».

50 *Introduction à l'analyse infinitésimale*, trad. Jean-Baptiste Labey, Paris, Chez Barrois, t. I, 1796, p. 2.

nies⁵¹. Voici le concept de *fonction analytique*. La fonction analytique est donc définie par son expression analytique et sa continuité, en général, est présupposée. C'est ainsi que la continuité d'une fonction, au lieu de la dépendance leibnizienne entre des « passages à la limite »⁵², devient affaire d'uniformité *de loi* qui détermine toutes ses valeurs dans le domaine tout entier de la variable. Et puis, c'est à l'expression elle-même d'une telle loi que la continuité de la fonction sera attribuée⁵³. Elle en constitue un « véritable tout »⁵⁴ : une fonction n'est continue que si elle « est enfermée dans une loi de continuité »⁵⁵.

En revanche, sont fonctions ou « courbes discontinues et irrégulières » celles qui ne se définissent pas par une expression analytique à valeur unique, ou bien qui « ne sont pas formées suivant une seule loi constante »⁵⁶. En conséquence, les courbes ou fonctions discontinues comportent plusieurs lois de continuité, elles sont *mixtes* ou *mécaniques*⁵⁷. La distinction eulérienne est bien plus important qu'elle ne paraît à première vue. En effet, elle permet d'envisager l'étude de fonctions parfaitement arbitraires, indépendamment de leur forme géométrique, composition analytique ou condition de différentiabilité⁵⁸ ; après tout, les fonctions discontinues *sont* des fonctions. Et c'est là que réside l'enjeu du problème des cordes vibrantes ; ci-gît l'universalité de la loi de continuité en tant que condition restrictive ou « pierre de touche » de l'analyse mathématique au sein de la mécanique. Car, pour répondre à notre question initiale, dans le langage des formules et des équations différentielles, la nature ne fait point de saut si et seulement si ce ne sont que des fonctions analytiques qui peuvent servir de solution aux problèmes physiques.

Dans le cas des cordes vibrantes, le problème s'énonce sous la forme d'une condition initiale : est-ce que la fonction représentant la figure initiale de la

51 *Ibid.*, p. 45 sq. Voir aussi Adolf P. Youschkevitch, « The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century », *Archive for History of Exact Sciences*, t. XVI, n° 1, 1976, p. 62-63.

52 Voir la n. 37.

53 Jan Šebestík, *Logique et mathématique chez Bernad Bolzano*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 2002. p. 74-75.

54 Voir Émilie du Châtelet, *Institutions de physique*, Paris, Chez Prault fils, 1740, p. 31-33.

55 Leonhard Euler, « Remarques sur les mémoires précédents de M. Bernoulli [1753] », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 1755, p. 201. Nous soulignons.

56 *Introduction à l'analyse infinitésimale*, éd. cit., t. II, 1797, p. 4.

57 « Quoiqu'on puisse décrire mécaniquement plusieurs lignes courbes par le mouvement continu d'un point, qui présente aux yeux la courbe dans son ensemble ; nous les considérons ici principalement comme le résultat de fonctions ; cette manière de les envisager étant plus analytique, plus générale et plus propre au calcul » (*ibid.*). Euler parle aussi d'une ligne tracée librement de la main (cf. la n. 42).

58 Voir Andreas Speiser, « Vorwort », *op. cit.*, p. XXII-XXIV.

corde doit être « assujettie à une même équation et liée par la loi de continuité » ?

Sans entrer dans le détail⁵⁹, l'objectif de d'Alembert, nous le savons déjà, consistait à montrer que la corde vibrante prenait une infinité de figures autres que « la compagne de la cycloïde allongé » ou la sinusoïde. Il arrive à la célèbre équation d'onde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

L'intégration en donne une équation générale $y = \Psi(t + s) + \Gamma(t - s)$ qui, comme il est aisé de voir, « renferme une infinité de courbes⁶⁰ », dont le cas spécial ($y = 0, t = 0$) lorsque la corde « commence à entrer en vibration ». Il s'ensuit d'autres conditions remarquables déterminant la figure et le mouvement de la corde (parité, périodicité etc.), mais la question cruciale est celle de la nature des fonctions « arbitraires » Ψ et Γ : est-ce qu'elles sont vraiment arbitraires ? Peut-on leur substituer même des fonctions *discontinues* ? D'Alembert de conclure :

[...] donc l'expression de la vitesse initiale imprimée à chaque point de la corde, lorsqu'elle est en ligne droite, et qu'elle commence à se mouvoir, doit estre telle, qu'étant reduite en serie, elle ne renferme que des puissances impaires de s ; autrement, si la fonction de s , qui exprime cette vitesse initiale, n'étoit pas une fonction impaire de s , le problème seroit impossible, c. à d. on ne pourroit pas assigner une fonction de t et de s , qui representât en general la valeur des ordonnées de la courbe pour une abscisse s , et pour un tems t quelconque⁶¹.

Que signifie précisément cette « impossibilité » ? Le problème est-il impossible pour l'analyse ou pour la nature ? Voici la question labyrinthique et hautement ambiguë. Faut-il admettre que certains systèmes mécaniques sont interdits pour toujours à l'analyse, bien qu'ils soient bien imaginables, voire définis et exprimables – si, et seulement si, la nature *faisait* des sauts ? Pourtant, la nature ne suit-elle toujours, dès le premier moment de son opération quelconque, une *loi* – et, en dernière analyse, une *seule* loi ? Par contre, qui peut interdire à la nature de faire vibrer la corde sous forme d'une courbe

59 Pour un commentaire, voir Christian Houzel, « Les équations aux dérivées partielles : 1740-1780 » dans Alain Michel et Michel Paty (dir.), *Analyse et dynamique. Études sur l'œuvre de d'Alembert*, Québec/Paris, Les presses de l'Université de Laval, 2002, p. 242-258 ; et Clifford Truesdell, « The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788 », *op. cit.*, p. 237-263.

60 « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », *art. cit.*, p. 217.

61 *Ibid.*, p. 218-219.

irrégulière, mécanique, *déterminée librement* par nos doigts ? La réponse⁶² de Euler ne s'est pas fait attendre :

A l'égard de l'autre limitation⁶³, qui suppose toutes les vibrations régulières, on tâche de la défendre en disant, que bien qu'elles s'écartent de cette loi au commencement du mouvement, elles ne laissent pas d'assujettir au bout d'un très court espace de temps à l'uniformité, de sorte qu'à chaque vibration la corde s'étend tout à la fois, et ensemble en ligne droite [...] si les vibrations suivantes sont régulières, il ne sera en aucune manière possible que les précédentes se soient écartées de la règle ; d'où résulte aussi éviemment, que si la première vibration a été irrégulière, les suivantes ne peuvent jamais parvenir à une parfaite régularité. Or la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant que de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque ; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement⁶⁴.

Évidemment, Euler n'hésitait pas à trancher en faveur de la généralité de l'analyse, entraînant un clivage de la *lex continuitatis leibnitiana*, qui, au fond, équivalait à son abrogation ou abandon. La nature ne se soucie pas de nos fonctions analytiques. Néanmoins, c'est dans l'intérêt et dans l'espoir évident d'une notion analytique de continuité plus haute et plus générale au sens de Cauchy, voire de Bolzano. Une figure initiale quelconque est admissible, « *qui ne differe cependant de la droite qu'infiniment peu* »⁶⁵. En revanche, il est bien connu que d'Alembert n'a jamais accepté une telle solution, jugée trop artificielle et incapable de la *vraie* généralité⁶⁶, et qui effectivement trahit la nature la plus profonde du premier calcul infinitésimal ainsi que l'idée ou plutôt le sentiment de la nature continue, harmonique et une⁶⁷.

62 « De vibratione chordarum exercitatio [1748] », *Nova acta eruditorum*, t. I, 1749, p. 512-527.

63 La première, aussi essentielle que la présente, touche la supposition des vibrations comme infiniment petites « quoique réellement elles conservent toujours une raison finie à la longueur de la corde ». Ici, paradoxalement, l'infiniment petit représente une *approximation* pour les mouvements finis, pourtant si petits qu'il n'en résulte pas « d'erreur sensible. D'ailleurs on n'a pas encore poussé assez loin, ni la Mécanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvemens dans les vibrations finies » (« Sur les vibrations des cordes », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, t. IV, 1750, p. 69-70).

64 *Ibid.*, p. 70.

65 *Ibid.*

66 Pour d'Alembert, il faut nécessairement qu'il y ait une *connexion* fonctionnelle entre les variables s et t : « Dans tout autre cas le problème ne pourra se résoudre, au moins par ma méthode, et je ne say même s'il ne surpassera pas les forces de l'analyse connue » (« Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue [1750] », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 1752, p. 358).

67 Voir la n. 1. Pour l'exposé du déroulement ultérieur du débat, notamment les interventions de Daniel Bernoulli et de Lagrange, voir Clifford Truesdell, « The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788 », *op. cit.*, p. 254-286.

Les forces vives

La querelle des cordes vibrantes a fait entendre, d'une manière précise et analytique, le labyrinthe d'ambiguïtés et de questions limites, qui s'ensuivait du principe leibnizien « que la nature ne viole jamais »⁶⁸. En tant que conséquences de la loi de continuité, elles concernent toutes les limites de la science, l'esprit des lois de la nature, les principes métaphysiques de la mécanique... non moins que le Dieu des philosophes et son action dans la nature, le problème du libre-arbitre ou le droit de la raison à l'infini⁶⁹. De même, les attitudes des acteurs principaux de l'histoire des cordes, Euler et d'Alembert, envers la loi de continuité, ne sont pas exemptes de cette ambiguïté et portent les marques d'une certaine ironie.

Nous avons déjà mentionné l'origine « dynamique » de la loi de continuité et l'importance fondamentale de la notion de *force* dans son émergence. Et surtout celle du principe de conservation de la « force vive » exprimant la nature « ontologiquement dynamique, et non spatiale, de la substance »⁷⁰. Or, c'est précisément d'Alembert qui a radicalement approfondi l'approche « formaliste », en mécanique, en bannissant toute notion de forces, « êtres obscurs et métaphysiques, qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une science claire par elle-même »⁷¹. De plus, le sensualisme lockien de d'Alembert l'empêche effectivement de considérer quoi que ce soit d'autre que des effets de la nature ou phénomènes irrémédiablement isolés, sans jamais pouvoir atteindre les « puissances ou causes motrices » ; et encore moins l'unité, congruité et continuité des deux.

Pour lui, l'analyse ne parle-t-elle pas *stricto sensu* que de ses propres formules, si toute condition (méta)physique d'intelligibilité – autre que de la simplicité formelle – est en principe exclue de la mécanique ? Mais, d'où vient alors cette insistance que chaque opération de la nature ait eu *une loi de continuité* ? On peut ainsi être surpris par le statut que d'Alembert accorda aux « lois générales » de sa « dynamique » à l'occasion de la question du

68 Jean Le Rond d'Alembert, s. v. « Continuité (loi de) », dans *Encyclopédie*, t. IV, 1754, p. 117. L'auteur de l'article est Johann Heinrich Formey (n. 38).

69 Cf. l'expression très succincte de Foucher de Careil (?) par rapport à la loi de continuité, ici considérée dans les termes d'horizon et de limite (voir, par exemple, MS IV, 106) : « Qu'on m'accorde le dernier terme, ou bien point de philosophie ; que dis-je ? point de mathématiques transcendantes » (« Note sur la loi de continuité », dans *Nouvelles lettres et opuscules inédits de Leibniz*, éd. August Foucher de Careil, Paris, August Durand, 1857, p. 418). Cf. *Accessio ad Arithmeticae infinitorum*, 1672, A II, 1, 342.

70 Alain Firode, *La dynamique de d'Alembert*, Montréal/Paris, Bellarmin/Vrin, p. 47 ; voir aussi les n. 34 et 44.

71 *Traité de dynamique*, « Préface », Paris, Chez David, 1743, p. xvi. Le tour est parfait : tandis que pour Leibniz ou Bernoulli le métaphysique est la source et le sujet réel de la science, il sert, dans les yeux de d'Alembert de marque des ténèbres.

concours tenu par l'Académie de Berlin en 1756, « si les lois de la statique et de la mécanique sont de vérité nécessaire ou contingente »⁷². Selon d'Alembert, il s'agit de vérités *nécessaires*. Son argumentation, certes, écarte toute considération de Dieu qui aurait pu choisir des lois de la nature autres que les lois actuelles. Cependant, elle repose sur un procédé de déduction *a priori* établissant la nécessité des lois de la mécanique à partir des idées « pures » de la matière, du corps et du mouvement – déduction opérée, selon toute apparence, en se servant du principe de raison que d'Alembert se donnait pour l'objectif d'éliminer⁷³.

Par contre, c'était Euler qui, nous y avons assisté, sacrifia l'universalité de la loi de continuité pour faire place à l'analyse. Toutefois, il s'agit du même Euler, en général bien plus favorable aux principes leibniziens, qui, pour sa physique, adopte le fondement même de la loi de continuité chez Leibniz en déclarant : « Comme la construction du monde est parfaite et due à un créateur infiniment sage, il n'arrive rien dans le monde qui ne présente quelque propriété de maximum ou de minimum »⁷⁴ ; et qui, dans le cadre de la controverse des forces vives, tient pour une *preuve* de la divisibilité *infinie* de la matière que la notion de dureté ultime *contredit à la loi de continuité*⁷⁵.

L'autorité de la loi de continuité dans le domaine du mouvement géométrique s'exerçait d'une manière latente, d'autant plus qu'elle était considérée comme « absolument nécessaire ». Il fallait un grand exploit analytique de

72 Alain Firode, *La dynamique de d'Alembert*, op. cit., p. 104 sq.

73 Compte tenu de la formalisation leibnizienne de la contingence et de la nécessité, le raisonnement sur les vérités de mécanique, vérités *contingentes*, doit se baser sur le principe de raison. Le paradoxe a vite été remarqué par des contemporains, ou au moins interprété comme tel : « [...] il est curieux », résume Carnot, « de voir comment d'Alembert, qui se croyait bien éloigné de philosopher à la manière de Leibniz, emploie, pour établir ce qu'il appelle la nécessité de lois du mouvement, des raisonnements qui ne sont qu'une application continue du principe fondamental de la doctrine leibnizienne » (cité dans André Charrak, *Contingence et nécessité des lois de la nature au XVIII^e siècle. La philosophie seconde des lumières*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 2006, p. 141).

74 « *Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima, atque a creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo maximi minimive ratio quaequam eluceat* » (*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne/Geneva, Apud Marcum-Michaellem Bousequet, 1744, p. 245 ; trad. française dans Gottfried Wilhelm Leibniz, *Naissance du calcul différentiel*, éd. Marc Parmentier, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1995, p. 146). Il s'agit de l'idée leibnizienne de la *forma optima*, dont la continuité n'est qu'une suite ou manifestation ; voir *De rerum origine radicali*, 1697, GP VII, 303. Voir les critiques acerbes de Maupertuis d'une « certaine loi de continuité », en contraste, peut-être étonnant, avec son propre principe de minimum, dans « Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique [1746] », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 1748, p. 284.

75 « De la force de la percussion et de sa véritable mesure [1745] », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, n° 1, 1746, p. 31-33. Voir Gert Schubring, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*, op. cit., p. 178. Cf. *Lettres de M. Euler à une princesse d'Allemagne*, Paris, Chez Royez, 1788, p. 210-215.

d'Alembert, la théorie des équations aux dérivées partielles, et une forte intuition théorique de Euler, afin de pouvoir la mettre au jour et identifier son rôle déterminant. Or, c'est tout le contraire en ce qui concerne l'aspect complémentaire du continu physique, celui de nature ou de composition de la matière. En effet, comme les « premiers éléments » de la matière résident à l'époque – *de iure* ou *de facto* – au-delà de l'horizon de toute expérience, c'est de la loi de continuité, principe de l'horizon même⁷⁶, que dépend toute solution conséquente du problème. Car c'est la loi de continuité qui régit l'imaginaire théorique.

Les philosophes intervenant dans la dispute des forces vives en sont⁷⁷ conscients. Depuis les attaques de Maclaurin, privant Jean Bernoulli⁷⁸ du prix de l'Académie Royale des sciences de Paris en 1724⁷⁹, le rôle et la portée du principe leibnizien y sont décisifs, et assumés comme tels. Ce qui est en cause, c'est la possibilité d'existence des corps durs et, par conséquent, celle de la physique newtonienne même, de plus en plus victorieuse à l'époque. Le dilemme est simple ; les conséquences, graves. Étant donné l'existence d'éléments de la matière parfaitement durs, il arrive lors, de leurs chocs, des sauts dans la nature ou bien des changements brusques de leur vitesse et direction.

Du coup, faut-il rejeter cette « chimère » de la dureté absolue⁸⁰, infinie ou miraculeuse, et postuler une matière parfaitement élastique, afin de préserver la loi de continuité ? Apparemment, cela n'est possible qu'en cas de la division infinie de la matière – division qui prive les corps de fondement et qui entraîne la nature corporelle dans le labyrinthe du continu. Ou faut-il refuser la loi de continuité « supposée générale avec peu de fondement »⁸¹, et, avec elle, non seulement cette idée enracinée de la nature parfaite, autonome, une et harmonique – *imago-similitudo* de la sagesse suprême –, mais aussi la validité universelle du principe de raison⁸² ?

76 Voir l'introduction de notre chapitre, notamment le paragraphe autour de la n. 6.

77 Cf. Nikolaus von Beguelin, « Recherche sur l'existence des corps durs », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 1753, p. 334.

78 Nous avons déjà mentionné (n. 41) le mémoire présenté au concours. Le même traité sera gagnant en 1726, où l'Académie annonce un concours sur la question analogue touchant les corps élastiques.

79 « Démonstration des loix du choc des corps », *Recueil des pieces qui ont remporté le prix de l'Académie royale des sciences*, Paris, Chez Claude Jombert, 1724.

80 Jean Bernoulli, *Discours sur les lois de la communication du mouvement*, op. cit., p. 8-9.

81 Colin Maclaurin, *Traité des fluxions*, trad. Esprit Pezenas, Paris, Chez Charle-Antoine Jombert, t. II, 1749, p. 25.

82 Voir la n. 38.

Regula doctae ignorantiae

Kästner, Kant et Boscovich

Cette impasse est évidemment sans issue. À l'époque du déclin de la pensée métaphysique et de la physique sans fondement (dont la meilleure illustration paraît l'anecdote sur Laplace et Napoléon), le principe leibnizien deviendra bientôt un « *arbitrary prejudice*⁸³ ». Néanmoins, deux solutions sont pensables selon notre avis, qui prennent au sérieux la loi de continuité en la transformant, d'une manière ou d'une autre, en une « règle de la docte ignorance⁸⁴ » de l'âge de continuité. L'une, kantienne en esprit, se dessine déjà dans les analyses de Kästner et remet l'autorité de la loi dans le domaine de la seule perception ; l'autre, celle de Boscovich, consiste en une sublimation théorique de la loi de continuité.

Voici le noyau de la critique du principe telle que nous la trouvons chez Kästner⁸⁵ : l'expérience, même toujours confirmée, n'en apporte aucune preuve⁸⁶ ; cependant, la déduction de la loi de continuité à partir du principe de raison paraît, elle aussi, inutile et incertaine.

Nun verbietet das Gesetz der Stetigkeit, der Sache, die verändert wird, sogleich aus jenem in diesen Zustand durchgehn, der vom vorhergehenden nicht soviel unterschieden ist, als der folgende. Und weil sich der Unterschied dieses mittlern Zustandes und des vorhergehenden, noch wird angeben lassen, so muß zwischen beyden ein neuer mittlerer Zustand sein, und dieses immer si fortgesetzt werden, bis der Unterschied zwischen dem vorhergehenden Zustande, und seinem nächstfolgenden sich verlieret [...]. Aber daß dieser mittlern Zustände unzählich viel sein müssen, davon giebt die Erfahrung mir keinen Beweis; denn, daß ihrer oft soviel sind, daß wir sie zu zahlen ermüden, daß ihre Gränze schwimmt und in einander fließt [...] Dieses beweist nur, daß die Sache uns so vorkömmt, nicht daß sie so ist⁸⁷.

83 Clifford Truesdell, « The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638–1788 », *op. cit.*, p. 244.

84 « *Haec est ratio regulae doctae ignorantiae, quod in recipientibus magis et minus numquam devenitur ad maximum simpliciter vel minimum simpliciter, licet bene ad actu maximum et minimum* » (Nicolas de Cues, *De venatione sapientiae*, 26.79, h XII.76).

85 Voir Gert Schubring, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*, *op. cit.*, p. 183-185.

86 Abraham Kästner, *Anfangsgründe der höhern Mechanik*, *op. cit.*, p. 353.

87 *Ibid.*, p. 354-356

Toute connaissance que nous avons de la nature n'est, selon Kästner, que la connaissance d'apparences ; et c'est là où il faudrait chercher sa validité et son utilité⁸⁸. Nous ne savons jamais ce qui se passe réellement au-delà de l'horizon des apparences. Il s'ensuit que la loi de continuité *physique* n'est pas admissible, au sens strict, même comme hypothèse, puisqu'elle ne peut pas être prouvée ni renversée. Cependant, comment sommes-nous désormais en mesure de nous rendre compte de la chaîne causale de la nature ?

L'influence de Kästner sur Kant⁸⁹ est un fait bien connu. Le développement de la pensée kantienne sur le continu correspondant à l'histoire de sa doctrine même, il est inutile d'entrer dans le détail : les premières « censures » apparaissent chez Kant dans le contexte de la réfutation de la *vis inertiae*⁹⁰, supposée retardatrice du choc brusque (entre deux corps dont l'un se trouve au repos). Elles aboutissent à la notion de la relativité universelle du mouvement et à l'abrogation de la loi de continuité physique. Mais, si toute autorité de la loi de continuité dans la chose *an sich* est rejetée, à part son usage logique (le *continuum specierum*⁹¹) ou heuristique, c'est bien évidemment le sens transcendantal qui est fondamental :

Tout changement n'est donc possible que par une action continue de la causalité, qui en tant qu'elle est uniforme, s'appelle un moment. Le changement n'est pas constitué de ces moments, mais il est produit par eux, à titre d'effet. Telle est la loi de continuité de tout changement, qui a pour fondement que ni le temps, ni le phénomène dans le temps ne se composent de parties qui soient les plus petites possible, et que cependant l'état de la chose, en son changement, parvient en son second état en passant par toutes ces parties, comme par autant d'éléments. Il n'y a *aucune différence* du réel dans le phénomène, tout comme il n'y a aucune différence dans la grandeur des temps, qui soit *la plus petite* [...]⁹².

La continuité physique étant sauvée au niveau de l'apparition d'effets de la nature, à travers la progression *continue* du temps, la causalité réside dé-

88 « Wie man also die Stetigkeit in zugleich vorhandenen Dingen, als eine Erscheinung mit Recht gebraucht, so kann man auch eben so weit die Stetigkeit in der Folge gelten lassen. Daher ist dieses Gesetz in Berechnung der Naturbegebenen von grossen Nutzen; denn unsere ganze kenntniß der Natur, ist doch nichts weiter als eine kenntniß von Erscheinungen, die uns ganz was anders darstellen würden, wenn wir das wirkliche in ihnen sähen » (*ibid.*, p. 362-363).

89 Et sur Bolzano de même. Son sentiment sur la loi de continuité est d'ailleurs dans le même esprit, voir *Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte*, Praha, Kronberger a Řivnáč, 1843, p. 436.

90 « Si l'on retient seulement son sens logique, elle est une règle très belle et très juste pour le jugement » (« Nouvelle définition du mouvement et du repos [1758] », dans *Quelques opuscules précritiques*, trad. Sylvain Zac, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1970, p. 63).

91 Sylvain Zac, « Introduction », *ibid.*, p. 17.

92 *Critique de la raison pure*, trad. Alexandre Delamarre et François Marty, Paris, Gallimard, 1980, p. 246

sormais dans les anticipations de la perception : la loi de continuité se transforme en une condition régulatoire incorporant l'idée de l'horizon, une *limite* qui, en même temps, élargit notre connaissance de la nature. L'unité « métaphysique » ou « dynamique » des apparences semble rétablie, ainsi que la possibilité de l'investigation géométrique et des lois de la nature⁹³ – pourtant, les concepts infinitésimaux de la mécanique tels que celui de *conatus* sont pour toujours exclus, sans parler de pareils éléments du « sens interne », comme les *petites perceptions*⁹⁴.

Régissant et harmonisant depuis toujours des contradictions et des anisomies apparentes, il n'est pas étonnant que la loi de continuité s'avère d'une importance cruciale pour le projet kantien. Elle l'est non moins pour la physique ou plutôt pour la *théorie de la philosophie naturelle* de Boscovich. En effet, c'est lui qui a consacré à la loi de continuité un traité spécial⁹⁵, et qui l'a transformée en un fondement unique et universel de sa philosophie. Or, cette position privilégiée n'est pas sans un aspect paradoxal qui n'est cependant qu'une conséquence naturelle, voire l'achèvement de la loi de continuité. Car c'est la forme *géométrique*, intuitive et manifeste, de la continuité⁹⁶ qui a enfin connu une pareille sublimation et est devenue une loi suprême de la nature, tandis que toute la machinerie (onto)logique et (méta)physique leibnizienne a été expressément rejetée. Pourquoi ?

La réponse se trouve dans le premier labyrinthe de Leibniz. C'est la racine même de continuité chez Leibniz, le principe de raison, qui est mis en cause et qu'il faut rejeter selon Boscovich :

Legem Continuitatis in natura Leibnitiani conantur evincere ex Principio illo, quod Rationis sufficientis appellant, quod nimirum nulla esset ratio sufficiens, cur semel admisso saltu, tantus determinate saltus fieri deberet, non major, nec minor [...]. Nobis sane id argumentum, nequaquam arridet, et id principium, ut a Leibnitio, et praecipuis Leibnitianis admittitur, falsum omnino esse, ac etiam perniciosum arbitramur, ac praeterea [...] censemus, nunquam posse ulli esse usui ad quidpiam utcumque determinandum, et multo minus ad demonstrandum⁹⁷.

93 Voir André Charrak, *Contingence et nécessité des lois de la nature au XVIII^e siècle*, op. cit., p. 148-162.

94 La justification en est une question pour une autre analyse, voir *ibid.*, p. 247. Pour une bonne discussion, voir Michael Friedman, *Kant's Construction of Nature. A reading of the Metaphysical Foundations of Natural Science*, p. 388-412.

95 *De continuitatis lege et ejus consecrariis* [1754], dans *Edizione nazionale delle opere e della corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich*, éd. Luca Guzzardi e Fabio Bevilacqua, Roma, t. VI, 2014, p. 339-501.

96 « *in omnibus Geometricis curvis, nihil usquam mutatur per saltum, sed mutationes omnes motu continuo fiunt* » (*ibid.*, p. 379/XLI).

97 *Ibid.*, p. 394/LVI.

La source de cette perniciosité est claire : il s'agit du déterminisme du meilleur qui, soutient Boscovich à la suite de Newton, Clarke et d'autres, détruit la possibilité du libre arbitre – et notamment la possibilité de la liberté divine. Dieu n'est pas obligé de se soumettre au principe de raison : *stat pro ratione voluntas*⁹⁸. Ainsi la loi de continuité est-elle antérieure à la raison ; elle dérive d'elle-même, « *petita ab ipsa continuitatis natura* »⁹⁹.

Issue directement de la querelle des forces vives et de la recherche des règles du choc, la fameuse courbe des forces attractives et répulsives représente l'incarnation même de la loi de continuité. Elle exprime l'unique et universelle loi de la nature, généralisation limite, en vertu du principe de continuité, de la loi d'attraction de Newton¹⁰⁰. En effet, Il s'agit de la fameuse « équation du tout ». Les éléments ou atomes de la nature qu'elle relie, centres de force, points dynamiques, étant *inéendus, indivisibles, isolés*, par nature inaccessibles à toute perception, cette philosophie naturelle est parfaitement libérée de toute matière et causalité. Purement théorique, abstraite, analogique, elle n'exprime que le principe de la nature *pensée* en tant que cachée (pour toujours) au-delà de l'horizon, c'est-à-dire la règle de la docte ignorance ou la loi de continuité :

*Quotiescunque binae quantitates variables, quae nimirum magnitudinem mutare possunt, ita inter se connexae sunt, ut determinata magnitudine alterius, alterius etiam magnitudo determinetur; si concipiantur binae magnitudines prioris, et binae posterioris respondentem iisdem binis, ac prima quantitas mutatione continua abeat a prima magnitudine ad secundam transeundo per omnes magnitudines intermedias; idem praestabit etiam secunda*¹⁰¹.

Vertu symbolique

Nous avons présenté un essai d'histoire de la loi de continuité au XVIII^e siècle, expliquée en vertu de sa puissance symbolique et universelle telle qu'elle s'est constituée au sein du Grand siècle. C'était sur la base de cette « vertu symbolique » que l'adage ancien de la philosophie naturelle pouvait se transformer en un puissant principe heuristique et que la géométrie synthétique

98 *Ibid.*, p. 395/LVII. C'est là, bien évidemment, le problème de la nécessité morale et de la théodicée. Voir *Untersuchungen*, 1669-1670 (?), A VI, 1, 438 ; et *Discours de métaphysique* art. 2 et 3, A VI, 4-B, 1532-1534.

99 *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium*, I, § 48, Venetiis, Editio veneta prima, 1763, p. 22.

100 Rappelons que la possibilité des forces répulsives fut anticipée par Newton lui-même (Query XXXI de la quatrième édition des *Optics*).

101 *De continuitatis lege*, p. 383/XLV.

pouvait incorporer des méthodes algébriques formulaires, de plus en plus autonomes par rapport à leur suppôt géométrique. Ces dernières, en tant que véhicule de généralité, ont finalement permis de concevoir une nouvelle synthèse, la « nouvelle méthode », infinitésimale et symbolique, qui a non seulement donné un puissant essor aux mathématiques mixtes, mais aussi occasionné la formulation analytique de la loi de continuité en tant que loi universelle mathématique et physique.

Une fois que, par le pouvoir ou la vertu symbolique de la loi de continuité, la force de l'analyse fut en mesure de saisir celle de la nature et que le langage fonctionnel de l'analyse fut capable d'exprimer d'une manière plus abstraite l'idée de continuité, la mécanique rationnelle de la première moitié du XVIII^e a finalement pu trouver un moyen d'analyser cette universalité de la loi de continuité, ou bien de saisir la relation entre ses formes géométrique et physique. Un clivage ultérieur la privera de son autorité, universelle et tacite, de principe « métaphysique » de la mécanique. Par le pouvoir symbolique de la loi de continuité, celle-ci se « transcende » en quelque façon elle-même, ouvrant l'horizon d'une continuité plus haute et plus générale, qui sera en mesure de comprendre, dans l'étude de la nature, même les fonctions « discontinues ».

La perte de cette autorité métaphysique nous amène à la dernière phase de notre histoire de la loi de continuité, alors que cette dernière ne devient qu'un « dogme ». En effet, dès que le Dieu des philosophes est mort et que le calcul de l'infini s'impose avec évidence dans la science de la nature, on n'a plus besoin de justifications autres que la performance explicative, la simplicité théorique et l'élégance formelle, effets de la loi de continuité. Et c'est ainsi que la loi de continuité, en vertu de sa propre puissance symbolique, en arrive à son déclin, ou plutôt à sa sublimation, devenant un principe d'horizon ou une règle de docte ignorance.